The *Xavier Zubiri Review*, Vol. 3, 2000/2001, pp. 7-28

Aproximación del realismo matemático de Gödel al *realismo constructivo* de Zubiri

Guillerma Díaz Muñoz
Centro de Enseñanzas Integradas
Zaragoza, España

Introducción

Dado que tanto K. Gödel como X. Zubiri apoyan sus filosofías de la matemática en los resultados matemáticos del primero, sobre todo en su celebérrimo Teorema de incompletitud (1931),[1] cabe esperar alguna similitud entre sus posturas. En ambos casos nos hallamos ante la adopción de un nuevo tipo de *realismo matemático.*

Si bien es verdad que Gödel en algunos textos defiende el realismo platónico, en su conjunto apreciamos en él un denodado esfuerzo por abrir una nueva vía de intelección de la naturaleza de la Matemática. Sus intuiciones son enormemente sugestivas; aunque, como él afirma en su célebre conferencia de 1951, carezcan de total rigor "como consecuencia del estado poco desarrollado de la filosofía".[2] Y a pesar de su gran esfuerzo por elaborar una Metafísica, confiesa no lograrlo satisfactoriamente. He aquí, pues, el primer reto para el filósofo: desarrollar una filosofía realista que permita exponer rigurosamente el realismo matemático que se infiere de la Matemática gödeliana. Pensamos que éste ha sido uno de los propósitos de la genuina filosofía realista zubiriana, expuesta en su madurez en la Trilogía sobre la intelección—cuya piedra de toque es el Teorema de incompletitud de Gödel-. Según nuestro parecer, ésta permite dotar de rigor filosófico a las sugestivas ideas de Gödel.

El fin del presente artículo es mostrar el realismo *constructivo*[*] matemático de Zubiri como riguroso desarrollo del realismo matemático de Gödel; y a éste, por tanto, como realismo constructivo más que *platónico*.

1. Biografía intelectual comparada de Zubiri y Gödel

La simultaneidad de la biografía intelectual de Gödel y Zubiri quiere hacer plausible la *proximidad del realismo matemático de Gödel y el zubiriano*. Éste se ha gestado, en parte, como exigencia de las implicaciones filosóficas del Teorema de Gödel. El paralelismo entre nuestros autores mostrará cómo Gödel, uno de los matemáticos más grandes de la historia, tiene gran formación e interés por la filosofía; y cómo Zubiri, un genuino filósofo, tiene gran formación e interés por la matemática, especialmente por el Teorema de Incompletitud de Gödel. Vamos a ir esbozando cómo ambos tienen en común la defensa del *realismo matemático* y *filosófico* con apoyo científico en el *Teorema de incompletitud.* (Favor de examinar la Tabla 1 en la página siguiente).

[*] ¿"Realismo constructivo" o "constructivismo real"? Preferimos la primera denominación, a pesar de haber utilizado la segunda en nuestra tesis doctoral *Zubiri y la matemática: un nuevo constructivismo.* El argumento es el mismo que el de Zubiri para denominar la postura de Kant "transcendentalismo idealista" mejor que "idealismo transcendental", porque, según él, el idealismo está inscrito en la transcendentalidad de lo real, y no al revés (cfr. SE, p. 379). Asimismo, es preferible denominar la filosofía matemática de Zubiri *realismo constructivo* porque la construcción matemática se inscribe en la realidad dada en impresión, y no al revés.

Tabla 1
Biografía Intelectual de Gödel y Zubiri

	Gödel	***Zubiri***
1898		Nace el 4 de diciembre en San Sebastián
1906	Nace el 28 de abril, en Brünn (Moravia)	
1914		"Magia Parda". En este artículo, en el que expone un juego matemático, Zubiri ya da muestra de su temprano interés por la Matemática.
1920		Comienza en Lovaina los cursos para obtener la Licenciatura en Filosofía. Asimismo, asiste a los cursos de Física y Matemática con La Vallé-Poussin.
1921	Interés por la Matemática y la Filosofía.	Tesina: *Le probleme de l'objetivité d'après Ed. Husserl: La logique pure*. Universidad de Lovaina. Tanto el autor elegido—filósofo y matemático- como el tema—la lógica y la objetividad del juicio—muestran un importante factor de su orientación intelectual. Tesis doctoral: *Ensayo de una teoría fenomenológica del juicio* (publicada en 1923). En ella explícita dos convicciones, reveladoras de la gestación de su propia Filosofía en relación con la Matemática: el *interés filosófico de la matemática*; y, concretamente, la *dependencia de los tipos de Filosofía de las distintas interpretaciones de la Matemática* (p. 12).
		Apoyado en los resultados de la Matemática de finales del s. XIX y primer cuarto de s. XX, sostiene un CONCEPTO OBJETIVISTA-IDEAL DE LA MATEMATICA (hasta 1931): Es creación nuestra; objeto ideal; evidencias apodícticas; método deducción lógica; verdad adecuada; opuesta a Ciencias empíricas. Esta interpretación de la Matemática le lleva a una Filosofía de la Objetividad. Es el inicio de la ETAPA FENOMENOLOGICA o DE LA OBJETIVIDAD (hasta 1931): Las cosas, correlato objetivo e ideal de la conciencia. La esencia, anterior a la existencia, es ideal; constituida por notas no-contradictorias. Su conocimiento, absoluto

		e infalible.
1925	Asistencia al curso 1925/26 de Filosofía de H. Gomperz	
1926	Es significativo señalar que en esta fecha adopta el REALISMO MATEMATICO y CONCEPTUAL, que será principio heurístico del descubrimiento de su Teorema de 1931. Participa en el Círculo de Moritz Schlick (posterior Círculo de Viena). Comparte su interés por los fundamentos de la matemática, pero no su empirismo estricto, anti-metafísica y concepción "sintáctica" de la matemática.	
1928	Asiste al curso 1928/29 sobre "los fundamentos filosóficos de la aritmética" de Carnap. Conoce la conferencia que da Hilbert en Bolonia, sobre el problema de la completud y consistencia de los sistemas matemáticos.	Asiste a cursos y conferencias de Husserl y Heidegger en Alemania.
1929	Renuncia a la ciudadanía checa y adquiere la austríaca. Tesis doctoral sobre la completitud de la lógica elemental.	El curso 1929-30 estudia en Berlín: Matemáticas, Física teórica, Ciencias Naturales, etc. Entabla amistad, con Planck, Schrödinger y Einstein.
1930	Prueba la suficiencia del cálculo lógico de primer orden. Del 5-7 de septiembre asistió al congreso de Königsberg sobre Epistemología de las Ciencias Exactas. En él participaron: Carnap, Heyting, J.v. Neumann y Waismann. Anunció sus resultados de incompletitud de la aritmética. Y manifestó sus dudas filosóficas sobre el programa formalista.	Cabe presumir que Zubiri, dado su interés por la Filosofía de la Matemática, asistiera a este congreso o se hiciera pronto con sus ponencias y comunicaciones.
1931	A principios de año se publica el célebre artículo "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas conexos". *Prueba que un sistema formal consistente que contenga parte de la*	Zubiri está en Berlín, donde contacta y tiene amistad con eminentes científicos, como Einstein. La relación del Círculo de Berlín con el de Viena hace verosímil que Zubiri conociese el artículo de Gödel.

	Aritmética es incompleto y no se puede probar en él su consistencia. Correspondencia con Zermelo. El 2 de julio probó que la verdad aritmética no es definible en aritmética.	En octubre vuelve a la Cátedra de Historia de la Filosofía en la Universidad Central de Madrid.
1932	Presentó su célebre artículo en la Universidad de Viena para su Habilitación.	Es significativo que Zubiri fije en esta fecha su ABANDONO DEL OBJETIVISMO-IDEAL DE LA MATEMATICA. En ella expresa: "Los números, el espacio, las ficciones, tienen también, en cierto modo, su realidad" ("Qué es saber", 1935, en NHD, 74). Esta nueva interpretación de la Matemática se corresponde con el inicio de su ETAPA ONTO-LOGICA (hasta 1944). Defiende que, al igual que los objetos matemáticos, las cosas no son correlato objetivo e ideal de la conciencia, sino cosas dotadas de estructura entitativa. Señala que la lógica formal se funda en la "LOGICA DE LA REALIDAD", y no al revés.
1935	Descubrimiento de los conjuntos *constructibles* (a los que se referirá Zubiri en *Inteligencia y Logos* al exponer su noción más radical de *construcción* desde la inteligencia sentiente).	
1938-39	Gödel prueba la consistencia de la hipótesis del continuo y del axioma de elección respecto a los axiomas de la teoría de conjuntos	Desde 1936-1939 Zubiri está en París. Profundiza en la Matemática (y otras ciencias) en contacto con eminentes especialistas. Son expresivas las palabras de C. Castro sobre el gran interés por la Matemática de Zubiri: "Su ciencia dilecta, la matemática, tanto le gustaba, que en 1939 le entraron ganas rabiosas de hacerse ingeniero en el politécnico de Zürich" (1986, p. 28). En diciembre, es trasladado a la Universidad de Barcelona (hasta 1942)
1940 *1943*	Gödel y su esposa Adele emigran a Princeton (New Yersey). Comienza sus contactos con Einstein (hasta que éste fallece en 1955) A partir de esta fecha hasta su fallecimiento, Gödel se dedica, sobre todo, a la Filosofía de la Matemática y en general.	

1944	Primer ensayo filosófico: "La lógica matemática de Russell". En él expone una FILOSOFIA REALISTA O "PLATONICA" de la lógica: Hay similitud entre la intuición matemática y la percepción sensible; las clases y conceptos son realidades independientes de nuestras creaciones y no son una "manera de hablar"; la matemática ha perdido su "absoluta certeza". Este nuevo planteamiento exigirá, sin duda, una nueva noción de intelección, realidad y verdad.	Publica: *Naturaleza, Historia, Dios* Es significativo que Zubiri marque en esta fecha el Inicio de la ETAPA METAFISICA o FILOSO-FIA DE LA REALIDAD; y todavía lo son más sus palabras a la luz del contexto intelectual de Gödel: "En ella me he visto forzado a dar una idea distinta de lo que es la intelección, de lo que es la realidad y de lo que es la verdad. Son los capítulos centrales del libro *Inteligencia sentiente*" (NHD 16-17, 1980).
1946	Gödel pasa de ser miembro ordinario a miembro permanente del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. El día 17 de diciembre, da una conferencia sobre problemas de las matemáticas en el Congreso de matemáticos en la Universidad de Princeton, con motivo de la celebración del bicentenario de su Fundación. Sugirió la idea de estudiar los conceptos de demostrabilidad absoluta y definibilidad absoluta.	Zubiri viaja con su esposa y colaboradora, Carmen Castro, a Princeton. Ahí está el padre de C. Castro, Américo Castro, como profesor desde 1940—igual que Gödel—. Son relevantes las palabras de Carmen Castro respecto del tema que nos ocupa: Sí le gustaba el estilo universitario de Princeton, única Universidad americana que conoció, y donde también gustó él" (Ibíd, p. 85). Xavier encontró en Princeton a muchos profesores europeos conocidos, que habían recabado para sí aquella Universidad, y el célebre "Instituto" que reunía sabios. Conoció a otros famosos de quienes bien conocía la obra. En aquella Universidad, el 2 de octubre de 1946, Xavier dio una conferencia en francés, sobre "Le réel et les mathematiques: un problème de philosophie", en la "Class of 1879 Hall", que era la Biblioteca del Departamento de Filosofía, ante filósofos, matemáticos y físicos de nombre famoso". (C. Castro, 1986, p. 83) Lamentablemente no se conserva la intervención de Zubiri, pero es presumible su referencia al Teorema de Gödel y que éste, dado su interés por la realidad de la matemática, fuese uno de los matemáticos famosos presentes, o al menos tuviera pronto conocimiento de ella.
1947	"¿Qué es el problema del continuo de Cantor?". Expone la realidad de los conjuntos.	

1948	Recibe la nacionalidad americana.	
1949	"Una observación sobre la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista".	
1951	Recibe el premio Einstein. El 26 de diciembre en la Brown University Providence (Rhode Island), invitado por la American Mathematical Society, imparte la magistral conferencia: *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Philosophical Implications* (Gibbs Lecture). En ella explicita su REALISMO MATEMATICO, que curiosamente está más próximo al zubiriano—por esas fechas tampoco expuesto todavía con el rigor de la Trilogía sobre la intelección- que al "platónico". Defiende que la Matemática no es sólo libre creación; hay algo más que la sensación real y "dado" por la intuición, que restringe la libertad para formar nuestros conceptos matemáticos. Su objeto es real. Su método no es la mera deducción lógica, ni su verdad la demostrabilidad. Su conocimiento es falible e incompleto, como las ciencias empíricas. Filosofía de la mente: Ésta no puede reducirse al cerebro. Oposición al materialismo filosófico.	
1952	La Universidad de Harvard le concede el título de Doctor honorario en Ciencias y le distingue como "el descubridor de la verdad matemática más significativa de este siglo".	
1953	Acepta la invitación de Schilpp para escribir un ensayo sobre la filosofía de Carnap. Trabaja varios años sobre ésta, según distintas versiones, pero no llega a publicarlo (se hace en 1994). Frente a Carnap y el Positivismo Lógico, Gödel defiende que la Matemática no puede ser sintaxis del lenguaje, sino ciencia de objetos reales. Es profesor titular del Instituto de Estudios Avanzados hasta su muerte.	Curso oral *El problema del hombre* (1953-4). Recurre al Teorema de Gödel (SH 649) para apoyar que el objeto matemático es "realidad objetual, que trasciende del ámbito con que yo me lo represento" y para su crítica de la anterioridad del mundo ideal sobre el real y de la noción de intencionalidad de Husserl (no es primariamente la versión de la conciencia a la realidad, sino viceversa, de ésta a la conciencia).

1955	tudios Avanzados hasta su muerte. Es elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias.	
1958	*Ensayo sobre Bernays, "Sobre una extensión de una matemática finitaria que no se ha empleado todavía". Señala *la falta de un concepto preciso de "evidencia intuitiva" y "evidencia abstracta".* (Zubiri distinguirá videncia en la aprehensión primordial de realidad y evidencia en logos y razón; toda evidencia está mediada). Gödel señala la conveniencia, para probar la consistencia de la aritmética clásica, de que el constructivismo prescinda de la exigencia finitaria de la construcción espacio-temporal. (Éste es el sentido que parece tener en Zubiri).	
1959 *1961*	Gödel lee a Husserl. Es elegido miembro de la Sociedad Filosófica Americana.	
1962	Gödel se sumerge en un libro filosófico de especial interés para él, pero no menciona su título. Gödel publicó el "Postscriptum al ensayo de Spector". Trata el papel de la *constructividad* en la Matemática.	*Sobre la Esencia*. El Teorema de Gödel juega un papel esencial (p. 66). Es apoyo para defender la entidad positiva de los objetos matemáticos (frente a las objetividades intencionales); para el abandono de la anterioridad del concepto objetivo respecto de la cosa rea; y para entender la "posibilidad" desde la realidad y no como conjunto de notas no-contradictorias. Zubiri conceptúa la esencia en función de la "constructividad" intrínseca (cf. SE, 355-6)
1963 *1964*	 Gödel añade un suplemento y posdata a su artículo sobre Cantor con motivo de su segunda edición en la antología de P. Benacerraf y H. Putnam: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Muestra una *similitud entre la percepción de los objetos sensibles y la intuición matemática*, pues hay axiomas matemáticos que *nos fuerzan* a aceptarlos como verdaderos. Esta intuición no ofrece los objetos matemá-	*Cinco lecciones de Filosofía*

	ticos, sino algo real a partir de lo cual se forman. Esta "realidad dada" no es la sensación.	
1969		1969-70, curso *Los problemas fundamentales de la metafísica occidental*. Se apoya en el Teorema de Gödel (1994, 160) para refutar la tesis "logicista" de Leibniz de la prioridad de lo 'posible' sobre lo existente, de la 'idea' sobre lo real y de la 'esencia' sobre la existencia.
1970		*Sobre el tiempo* (2 lecciones)
1971		Fundación del *Seminario Xavier Zubiri*
1973 *1975*	 El presidente Ford le concede la Medalla Nacional de Ciencias.	*El Espacio* (4 lecciones) "La concreción de la persona humana", expuesto en *Sobre el hombre*. Afirma que no hay actividad intelectual "y" actividad cerebral, sino única actividad intelectivo-cerebral.
1978	Fallece el 14 de enero en Princeton. El Instituto de Estudios Avanzados organiza un encuentro en su memoria el 3 de Marzo, presidido por A. Weil.	
1979	La *Association for Symbolic Logic* dedica un Congreso a Gödel.	La República Federal Alemana le condecora con la medalla "Das Grosse Verdienst Kreuz".
1980 *1981* *1982*	 Adele muere y lega el Nachlass de Gödel al I.A.S. 1ª ed. de las Obras Completas de Gödel. Intr. y trad. de Mosterín.	*Inteligencia sentiente*. Ofrece una nueva noción de inteligencia, realidad y verdad. Sentir e inteligir son momentos de un sólo acto de impresión de realidad: la inteligencia sentiente. Real significa que los caracteres que lo aprehendido tiene en la aprehensión son "en propio", "de suyo". Y verdad es realidad presente en intelección, en cuanto presente. *Inteligencia y logos*. Zubiri ofrece un realismo constructivo matemático apoyado en el Teorema de Gödel; sobre todo, en "La realidad de lo matemático" (pp. 133-146). Significa la anterioridad de lo real sobre lo verdadero en la Matemática, y en la intelección en general (p. 145-6); y la aproximación aspectual de la verdad matemática a

		la realidad (pp. 327-8).
1983		Premio Nacional Santiago Ramón y Cajal. 1982-3 "Génesis de la realidad humana" (último trabajo completo que escribió Zubiri). Se recoge en *Sobre el hombre* (capítulo octavo). Defiende el "materismo", frente al materialismo: la materia da de sí su propia elevación a estructuras superiores. La intelección es cerebral y el cerebro inteligente. *Inteligencia y razón*. Menciona el T. de Gödel (p. 253) para defender la Matemática como ciencia de realidad y la prioridad de la aprehensión de realidad sobre la estructura lógica en el método matemático. Fallece el 21 de septiembre en Madrid.
1985	El día 1 de abril los trabajos de Gödel quedan disponibles en la Biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton.	
1986 *1987*	Publicación del I vol. de los *Collected Works* de Gödel, con los textos originales. Sociedad Gödel en Austria	*Sobre el hombre* (T. de Gödel en p. 649)
1989		*Estructura dinámica de la realidad*
1992		*Sobre el sentimiento y la volición*
1993		*El problema filosófico de las religiones.*
1994 *1996*	Reconstrucción y publicación de los inéditos de Kurt Gödel: la "Conferencia Gibbs" y Sobre Carnap.	*Problemas fundamentales de la metafísica occidental.* (Teorema de Gödel, p 160) *Espacio. Tiempo. Materia* (T. de Gödel, p. 63-4. Concluye: "lo irreal no es simplemente una irrealidad carencial, sino que tiene algo positivo que está ante mis ojos". Lo matemático es algo eminentemente real).

2. Presupuestos filosóficos útiles para conceptuar el realismo matemático

La concepción de la Matemática dominante alrededor de 1930 es la defendida por R. Carnap,[*] H. Hahn y M. Schlick. Consiste en una "combinación de nominalismo y convencionalismo", con certeza *apriorística* y compatible con el empirismo estricto. Prescinde de la intuición y de cualquier objeto o hecho matemático, reduciéndola a sintaxis del lenguaje.[†] Gödel se opone a ella apoyado en sus resultados[3] en "Is mathematics syntax of language?"[‡]. Considera que su apariencia *a priori* razonable se debe a que "los resultados negativos sobre su viabilidad, en el sentido más sencillo y filosóficamente más interesante, no se han discutido nunca suficientemente".[4]

Por su parte, nuestro matemático defiende que "para probar la consistencia de la matemática se necesita una intuición igualmente potente (aunque de un tipo diferente) con objeto de reconocer la verdad de los axiomas matemáticos".[5] Mantiene que los juicios de la Matemática son analíticos, pero no significa que sean tautológicos o "vacíos" de contenido, porque de cualquier forma que ésta (o parte de ella) se construya, siempre se necesitan ciertos términos no definidos y ciertos axiomas sobre ellos.[6] Sin embargo, a pesar del carácter objetivo de la verdad matemática, su contenido y hecho no es 'fáctico', sino 'conceptual'. Señala que "Lo que Carnap llama 'contenido' es realmente 'contenido fáctico'".[7]

Gödel ve claramente que para resolver la dificultad que envuelve la tarea de clarificar la naturaleza realista de la Matemática será de gran utilidad la elaboración filosófica sobre:

1. "la cuestión de la realidad objetiva de los conceptos y sus relaciones",[8]
2. "el verdadero sentido de la oposición entre cosas y conceptos, o entre verdad fáctica y conceptual", pues "no se comprende aún completamente en la filosofía contemporánea".[9]

También ha debido verlo así Zubiri, pues en su obra tienen ambas cuestiones un lugar capital. Presentamos su tratamiento como desarrollo del planteamiento de Gödel.

2.1 Teoría realista del concepto y del juicio

Tanto Gödel como Zubiri defienden el realismo del concepto y del juicio, como soporte filosófico útil para la comprensión del realismo matemático. Ambos rechazan

---

[*] Gödel recoge en una nota de S. L, II, p. 210, el pasaje de Carnap, *Erk.* 5 (1935), p. 36; *Act. Sci. Ind*. 291, p. 37. Dice: "Al unir las ciencias formales a las empíricas no se introduce ningún nuevo dominio de objetos, a pesar de la creencia en contra de algunos filósofos, que opinan que los objetos "reales" de las ciencias empíricas deben compararse con los objetos "formales", "intelectuales" o "ideales" de las ciencias formales. Las ciencias formales no versan sobre objeto alguno; consisten en sistemas de enunciados auxiliares sin objeto ni contenido". Posteriormente, Carnap no mantiene esta distinción entre "ciencias formales" y "ciencias empíricas" (cfr. S.L, II, p. 205).

[†] Gödel señala que Carnap desarrolla esta concepción de la matemática en *The Logical Syntax. of Language*. También la Escuela de Hilbert puede interpretarse como elaboración parcial de la misma, "porque los axiomas y reglas de inferencia de los sistemas formales pueden interpretarse como reglas sintácticas que establecen lo siguiente: 1. Todas las fórmulas que tengan cierta estructura son verdaderas; 2. Las fórmulas obtenidas de fórmulas verdaderas mediante operaciones formales son también verdaderas. Además, la consistencia se convertirá en el problema clave de la concepción sintáctica" (S.L, II, p. 211).

[‡] En 1953, Schilpp invitó a Gödel a colaborar en un libro sobre Carnap con un ensayo sobre "Carnap y la ontología de las matemáticas". A pesar de que hizo seis versiones del mismo, bajo el título "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?", comunicó en 1959 a Schilpp su decisión de no entregarlo.

la teoría apriorística y subjetiva sobre los conceptos en general y matemáticos en particular y defienden su realidad objetiva.

El planteamiento zubiriano es original. Para él la cosa aprehendida en aprehensión primordial tiene un "qué" compactamente unido a un "esto" de sus notas y un "cómo" de su configuración. El movimiento que desrrealiza el "qué" y lo reduce a mero concepto es libre y creador, pero orientado desde la cosa real aprehendida. No se trata, pues, de 'concepto de realidad' sino de *'realidad en concepto',* de "realidad terminada en libre qué".[10] Los conceptos matemáticos son "intelección constructiva" a partir de las notas abstractas o "prescindidas" de las cosas. "El 'qué-concepto' es la realidad en construcción".[11]

Tanto para Gödel como para Zubiri la existencia de proposiciones matemáticas verdaderas indecidibles refuta que los juicios matemáticos sean *tautologías* vacías de contenido, pues no hay un procedimiento mecánico para decidir su verdad o falsedad. La noción de *analiticidad* no es equivalente a tautología. Para Gödel no tiene el sentido subjetivista de 'verdadero en virtud de nuestras definiciones', sino el objetivista de 'verdadero en virtud de la naturaleza de los conceptos concurrentes' frente a 'verdadero en virtud de las propiedades y el comportamiento de las cosas' (noción de sintético). Añade: "Este concepto de analítico está tan lejos de significar 'vacío de contenido' que es perfectamente posible que una proposición analítica sea indecidible (o decidible sólo de forma probable). Pues nuestro conocimiento del mundo de los conceptos puede ser tan limitado e incompleto como el que tenemos del mundo de las cosas".[12]

También el joven Zubiri en su obra *Teoría Fenomenológica del Juicio* señala que *todo juicio es analítico,* pero no tautológico. En su *etapa realista* afirma que la distinción "analítico" y "sintético" no es adecuada desde inteligencia sentiente, porque la intelección es *noérgica* y no noética, esto es, en ella se nos da la realidad con una fuerza de imposición. La realidad misma *está* presente en la aprehensión primordial determinando la intelección ulterior del logos sentiente y de la razón sentiente.

Zubiri aporta también una interesante noción realista de juicio, útil para comprender la naturaleza de la Matemática. Para él, juicio no es relación de conceptos (A y B), sino *realización* de un concepto (B) en la *realidad realizada por postulación constructiva* (A). Juzgar no es, pues, atribuir un concepto a otro, sino *realizar* o aplicar una simple aprehensión (percepto, ficto o concepto) en "la" realidad de la cosa ya aprehendida como real en aprehensión primordial.[13]

El problema que subyace al juicio es la relación entre *intuición y concepto.* Su diferencia consiste en su *modo de actualización de la realidad: intuición* es aprehensión primordial de realidad y *concepto* actualización diferencial o mediada de realidad. Mientras que para Kant el conocimiento es *unidad sintética* de intuición y concepto, para Zubiri es *unidad de despliegue* de realidad. Entre ambos hay *unidad de intelección* y *de formalidad de realidad.* Dice Zubiri: "el concepto no es una mera referencia al objeto, sino a la realidad aprehendida en intuición, retraída y desplegada en forma de 'sería'".[14] La impresión de realidad se da en la aprehensión primordial—forma suprema de inteligir-; pero su insuficiente contenido lleva a su despliegue en aprehensión diferencial.[15] "El concepto es intuición exacta: la intuición es exigencia de concepto, esto es, de despliegue".[16] La intuición más rica no constituye la mínima exactitud que necesita la intelección de una cosa "entre" otras. "Por tanto la intelección ha de ser rica pero también exacta".[17]

La aplicación de esta concepción sobre el juicio en general al matemático en particular muestra que éste es irreductible al juicio lógico, porque sus términos 'A' y 'B' no son homogéneos, sino esencialmente diferentes: 'A' es una realidad postulada, y 'B' es algo irreal que se realiza en el primero. Zubiri considera que *la lógica de la afirmación* de la realización de 'B' en 'A' funda la *lógica formal.* Y no al contrario.[18] El juicio matemático no es necesidad con que un predicado lleva a un sujeto, o viceversa, sino con que una cosa real concreta actualizada medialmente en mi intelección determina mi afirmación de ella.

Ejemplificamos la concepción zubiriana del juicio sobre el particular "7 más 5 igual a 12". La aprehensión primordial de "7 más 5" ex-ige desde sí misma la realización en ella de la simple aprehensión "12". Se trata de una *intelección mediada* o *ex-igida desde* "7+5". Por tanto, *la actualización de la realidad "7+5" es fuerza exigencial de realización de la simple aprehensión 12.* Ésta no está contenida en la actualización de 7+5, (sería *tautología*), tampoco es mero *añadido* que determine lo que es 7+5 (sería juicio *sintético*). *Ex* significa *hacer salir "desde dentro".* Es clara la oposición de *ex*-igencia y de síntesis (*"añadir desde fuera"*). "12" está *dado* en "7+5" no como nota real, sino *como ex-igencia,* de ahí que sea término de e-videncia, en tanto que discriminación de exigencias. El contenido campal de lo real no es *a priori*, sino logrado en la actualidad diferencial de lo real. Tampoco *a posteriori* porque el sujeto cognoscente sólo en la medida en que es "arrastrado" por la *fuerza exigencial* de lo real actualizado aporta sus simples aprehensiones, que, por otra parte, la propia realidad selecciona. La subjetividad del "aporte" tiene como contrapunto la "selección" exigencial tanto de las simples aprehensiones que quedan excluidas como de las que quedan incluidas en la intelección. "La realización de estas últimas está exigencialmente determinada por la cosa real: es una determinación exigencial intelectiva, que acontece en selección".[19]

2.2 Verdadero sentido de la oposición entre cosas y conceptos, verdad fáctica y conceptual

Gödel considera que la distinción entre cosas y conceptos, verdad fáctica y conceptual no tiene el sentido dado por el Positivismo Lógico, esto es, verdad convencional y verdad empírica.

Ve claramente que en ambos casos nos hallamos ante "'hechos sólidos' que están enteramente fuera del alcance de nuestras decisiones arbitrarias"; y que "la relación de los objetos de la ciencia con nuestra experiencia es básicamente la misma en las 'ciencias empíricas' y las 'ciencias formales'".[20] Las razones que da son varias: La solución de ciertos problemas exige nuevos axiomas justificados por la intuición o experiencia.[21] "El proceso de derivación formal en una teoría constituye él mismo un tipo de observación".[22] El teorema matemático general tiene por objeto experiencias matemáticas que nos relacionan con sus casos particulares.[23] Es posible la aplicación del método inductivo a la matemática. Los axiomas matemáticos son refutables, "derivando alguna ecuación numérica errónea (lo cual, en lógica bivalente, equivale a derivar una inconsistencia)".[24] Gödel, sin embargo, no identifica las verdades matemáticas y las de las ciencias naturales. Para él existe una oposición fundamental.[25] Aunque, no alcanza a expresarla rigurosamente, como veremos en Zubiri.

Al igual que Gödel, Zubiri rechaza la distinción entre la verdad matemática y la de las ciencias naturales en términos de verdad formal y empírica. *Toda verdad racional es de experiencia.* El Teorema de Gödel muestra que el método matemático es vía en la realidad postulada, orientada según el rigor lógico. Constata cómo la inducción matemática es método pero no razonamiento, porque no se ha logrado formular el principio de inducción. Para él, "lo matemático es término de una probación física de realidad, es término de experiencia".[26]· Ésta es *com-probación* en la Matemática y *experimentación* en las ciencias naturales. *Toda verdad racional es aproximación* a la realidad de su objeto. La verdad matemática de *aspectualidad*—la intelección adecuada de cada cosa se deja fuera de lo definido y postulado propiedades a las que no alcanza el movimiento intelectivo- y la de cosas físicas de *inexactitud*—la intelección adecuada de cada cosa tiene una gradualidad-. *Toda verdad dual es exacta, evidente, rigurosa y cierta.* La *ex-actitud* es cualidad de estar exigido por la cosa real. La evidencia es exacta por estar determinada por la *exigencia constrictiva* de la realidad. El *rigor* es 'constricción exigencial'. Lo lógico un procedimiento para constreñir la exigencia. Certeza es el modo de afirmar y de estar actualizadas las notas de lo real en orden a las simples aprehensiones con efectividad unívocamente determinada.

Zubiri aporta, desde la distinción entre contenido y realidad de la inteligencia sentiente, un sentido original de la diferencia entre cosas y conceptos, verdad fáctica y conceptual. Como hemos visto en su teoría del concepto, él no se refiere a cosas y conceptos, sino a realidades *"en y por sí mismas"* y a realidades *"en y por postulación"* o realidades "en concepto". Su momento de realidad es idéntico. Su diferencia está en el contenido: dado, en el primer caso, y construido "según conceptos", en el segundo. Tampoco se refiere a verdad fáctica y conceptual. Considera erróneo el sentido de la oposición leibniziana entre verdad de hecho y verdad de razón.[27] Toda verdad es 'de realidad', ya sea sentida como *campal* (verdad campal) o como *mundanal y cósmica* (verdad racional). La realidad campal nos impele desde sí misma, en su modo de 'hacia', a lo mundanal; y lo mundanal está inteligido en lo real campal, pero como encuentro y cumplimiento de un esbozo. Y este encuentro es la verdad racional.[28] Además, ni realidad ni sentir implican contingencia. La necesidad de las verdades matemáticas pende de realidad *dada* en y por postulados. "Los postulados están, en efecto, libremente elegidos. Me bastaría con cambiar los postulados y la verdad matemática sería otra".[29]

3. La Matemática según Gödel y Zubiri: construcción en la realidad dada

Tanto Gödel como Zubiri consideran, frente al Positivismo Lógico, que la existencia de proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles muestra que la Matemática no es sólo creación del matemático, pues tiene más propiedades que las puestas por él.* Implica *algún* tipo de realismo. Precisaremos que se trata de un *realismo constructivo,* incipiente en Gödel y riguroso en Zubiri.

Gödel esboza las tres alternativas realistas disponibles en su momento: *aristotelismo* (los objetos matemáticos pueden localizarse en la naturaleza), *psicologismo* (en la mente humana) y *platonismo* (en ninguna de las dos). Rechaza el psicologismo porque se negaría el conocimiento matemático; y el realismo aristotélico por su dificultad para explicar los conceptos matemáticos como partes o cualidades abstractas de las cosas que tienen origen en los sentidos. Le queda, pues, el realismo platónico[30] en tanto que "la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto de los actos como de las disposiciones de la mente humana, y que es sólo percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta".[31] Como Platón, defiende que "los objetos y teoremas de la matemática son tan objetivos e independientes de nuestra libre elección y de nuestros actos creativos como lo es el mundo físico".[32] Pero esta afirmación hay

* Dice Gödel: "podría objetarse que las proposiciones indecidibles se deben a ignorancia, por la falta de conciencia clara de lo creado o por la dificultad en la práctica de los cálculos. Si así fuera, con el desarrollo matemático se irían resolviendo. Sin embargo, "los desarrollos modernos en fundamentación de la matemática han logrado un insuperable grado de exactitud, aunque ello no ha servido de ninguna ayuda a la solución de los problemas matemáticos" Gödel, C.G, p. 159.

que leerla junto a su matización de que al menos *"algo* en ellos, existe objetiva e independientemente de nuestros actos mentales y decisiones".[33] Se trata, pues, de *algún modo* de platonismo, en el sentido de algún realismo distinto del que afirma la existencia de los objetos matemáticos en la naturaleza o en la mente.

Zubiri es uno de los autores que mejor ha advertido que el realismo matemático es la implicación filosófica más importante del Teorema de Incompletitud.[34] De éste se sigue *"la anterioridad de lo real sobre lo verdadero en la matemática"*.[35] Los postulados no son meros enunciados lógicos sino caracteres del "contenido" de la "realidad" de lo postulado; enuncian la "verdad real" de lo postulado.[36] "Lo construido en "la" realidad es, por estar realizado, algo más que lo postulado al realizarlo".[37]. No es cosa real en y por sí misma como esta piedra, pero no es sólo lo que lo "real sería", sino lo que postulada y construidamente "es real". El objeto matemático es realidad construida "según conceptos" dentro del momento "físico" de la formalidad de realidad sentida. Puede tener propiedades "suyas", "propias", dadas y no concebidas.

El realismo *constructivo* zubiriano está fundado en la *distinción entre realidad y contenido* de la inteligencia sentiente. Ésta alumbra la unidad indisoluble de *imposición de realidad "y" libre construcción*. La Matemática, en tanto que acto de inteligencia sentiente, es "a una" *pro indiviso* sentida y creada, impuesta y libre, real y postulada. Si bien Gödel se refiere a estos dos componentes en la realidad matemática, sin embargo aparece como un "nudo" insoluble desde el marco conceptual del platonismo y de la tradición filosófica, que separa *inteligencia "y" sentir* (incluso como unidad sintética en Kant).

3.1 Impresión de "algo más" real en la Matemática: aproximación de Gödel a Zubiri

Para defender nuestra tesis de que el realismo matemático de Gödel es más próximo al de Zubiri que al platónico tenemos que hacer objeto especial de nuestro análisis su concepción sobre la *intuición* matemática. Ésta es distinta de la platónica, al menos en dos sentidos: es un modo de *impresión* y no proporciona al objeto entero sino *algo* a partir de lo cual *formamos* los objetos matemáticos. Así vamos a ver que se acerca a lo que Zubiri denomina *aprehensión primordial de realidad.*

Gödel constata a partir de su obtención de proposiciones matemáticas verdaderas indecidibles que, "a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por *el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos*".[38] Esta fuerza de imposición es clave para sostener el realismo matemático. Ahora bien no se trata de un puro descubrimiento de algo totalmente dado, pues como dice el autor: "Debería observarse que la intuición matemática no tiene que ser concebida como una facultad que proporcione un conocimiento inmediato de los objetos que le conciernen. Parece más bien que, como en el caso de la experiencia física, *formamos* también nuestros conceptos de estos objetos a partir de algo más que *es* inmediatamente dado".[39] Hacemos notar que esta expresión "algo más que *es* inmediatamente dado" es frecuente en Zubiri y para los dos autores piedra de toque del realismo matemático. Este algo "más" que subyace a la construcción matemática es un aspecto inmediatamente dado *de la realidad objetiva*, aunque distinto de la sensación. Dada la coincidencia de esta concepción y la zubiriana, transcribimos sus palabras:

> Sólo que este algo más *no* es aquí, o no principalmente, la sensación. Que además de las sensaciones hay algo real e inmediatamente dado se sigue (independientemente de las matemáticas) del hecho de que incluso nuestros conceptos referentes a los objetos físicos contienen constituyentes cualitativamente diferentes de las sensaciones o meras combinaciones de

las sensaciones".[40]

Para clarificar cómo nos es dado este "algo más" real distinto de las sensaciones, Gödel parece dejar a un lado el término de *intuición* y preferir el de *impresión*—que es, como pone de relieve Zubiri, constitutivo del sentir-. Distingue dos tipos de impresiones: las *sensoriales*, que tienen por objeto lo particular, y las *abstractas*, lo general. Tanto lo particular como lo general es "percibido" y no creado por nosotros. En el caso de lo particular parece claro y en el de lo general su argumento se funda en la distinción entre finitud-infinitud. Todo lo que el hombre (ser finito) produce es finito y el concepto general se refiere a infinidad de particularidades, entonces éste no puede ser producto suyo, sino dado. Para Zubiri la realidad de lo matemático es dada en impresión porque su infinitud no responde a la finitud de lo puesto por el hombre.

Gödel llega a conjeturar* que la razón es el "órgano físico"—lo que le aleja de los idealismos- de las impresiones abstractas.[41] La razón percibe, pues, "lo general" como los sentidos "lo particular".[42] Su analogía se manifiesta en el carácter "aproximado" de ambos conocimientos. La serie de axiomas matemáticos es prácticamente ilimitada, y cada uno de ellos expresa algún hecho matemático nuevo e independiente, por tanto, su conocimiento es tan limitado e incompleto como el de las cosas.[43] "La 'inagotabilidad' de la matemática hace aún más estrecha la semejanza entre la razón y los sentidos, porque muestra que también de este 'sentido' existe un número prácticamente ilimitado de percepciones independientes".[44] Es probable que dificultades aparentemente insuperables que otros problemas matemáticos han ido presentado durante muchos años se deban al hecho de que aún no han encontrado los axiomas necesarios. "Claro está que bajo estas circunstancias la matemática puede perder buena parte de su 'absoluta certeza'; pero esto ya ha ocurrido hasta cierto punto por influjo de la moderna crítica de fundamentos".[45]

Pero ¿cómo "percibe" la razón las *impresiones abstractas*? Gödel muestra un denodado esfuerzo por clarificar en cuanto a la facultad la *relación entre "razón" y "sentidos";* y en cuanto al objeto la relación entre impresión "abstracta" e impresión "sensorial". Apunta una cierta unidad, pero sin llegar a la formulación zubiriana de *inteligencia sentiente*—con sus modalizaciones: aprehensión primordial de realidad, logos sentiente y logos sentiente- ni de *impresión de realidad*—con sus dos momentos de contenido y de formalidad del "de suyo"—. Él, ante la dificultad que surge al tratar de comprender las impresiones abstractas *separadas* y *contrapuestas* a las sensoriales, sugiere audazmente que dicha dificultad se remedia "considerándolas en comparación con o a la vez que las impresiones sensoriales".[46] Esta observación es de capital importancia para la aproximación del realismo matemático de Gödel al de Zubiri, elaborado desde su perspectiva de inteligencia sentiente.

Hay que reconocer que estas ideas de Gödel son enormemente sugestivas, aunque necesitadas, como él reconoce, de alguna precisión. Ésta es la que nos parece que aporta la Filosofía realista de Zubiri, según vamos a exponer.

Zubiri, como Gödel, piensa que sólo sintiendo "algo real dado" puede construirse la matemática, y viceversa, "sin sentir lo matemático, no se puede construir la matemática".[47] A diferencia de Gödel, precisa que sentir no es intuición sino aprehensión primordial. El objeto matemático no es intuido, sino aprehendido en aprehensión primordial.[48] Ésta y la intuición coinciden en tanto que modos directos, inmediatos y unitarios de presentarse algo real a la intelección. Sin embargo, la aprehensión primordial tiene connotación "táctil" y de "asimilación" más que "visual" y "distante". Su carácter es *físico* o *noérgi-*

*Gödel confiesa que la precariedad de la formulación de su hipótesis es similar a la concepción de Demócrito respecto a la teoría atómica actual.

co—es "a una" *físico* "estar" "en" la cosa y estar "quedando" la cosa en la intelección—. La intuición es dimensión intencional o noética de la aprehensión primordial de realidad.[49] Ahora bien, este vocablo en Gödel no es mera dimensión intencional, pues señala su carácter de 'impresión' y de 'fuerza de imposición' de algo real. Por ello, quizás sea más riguroso entenderlo en su obra como aprehensión primordial de realidad.

Lo constitutivo de la aprehensión primordial de lo matemático es la *impresión*, ya puesta de relieve por Gödel. Lo meritorio de Zubiri consiste en su riguroso y pormenorizado análisis de la misma desde la inteligencia sentiente. Considera que la impresión tiene tres momentos: a) *afección* intelectiva de la formalidad de realidad "en" la que se construye por postulación el contenido del objeto matemático. No es afección *estimúlica,* sino afección *real,* de lo "*en propio*".[50] No supone *estímulo físico* ni *materialidad* que impresione algún sentido, sino *formalidad de realidad* que adviene a mi intelección por la aprehensión primordial de realidad. b) La alteridad con un contenido y una formalidad de realidad. La formalidad o independencia como *quedan* los objetos matemáticos no es *transcendente* (como sería el Mundo de las Ideas de Platón), sino *transcendental* porque se constituyen en la impresión de realidad dada en aprehensión primordial de realidad. c) La *fuerza de imposición* de algo real que constriñe la libertad creadora del matemático (momento puesto de relieve de modo convincente por Gödel). Esta "fuerza de imposición" tiene tres formas distintas, según las modalizaciones de la inteligencia sentiente: Fuerza *irrefragable* de realidad (en aprehensión primordial), fuerza *exigencial* de lo real (en el logos sentiente) y fuerza *coercitiva* de lo real (en la razón). En efecto, los objetos matemáticos imponen propiedades "suyas" al matemático, así como exigencias de lo que serían en realidad (su realización constituirá las evidencias) y unos límites coercitivos de qué sea la realidad profunda. La inteligencia construye postuladamente los objetos matemáticos en "la" realidad sintiendo propiedades que *"se le imponen, le llevan, le arrastran"*. Se elige libremente unos axiomas, pero, una vez construidos postuladamente, aparece otro real que se impone.

La potencialidad de la filosofía de Zubiri para interpretar el Teorema de Gödel y precisar la filosofía de la matemática gödeliana se muestra de modo singular en su explicación del tipo de impresión de lo matemático y su relación con la impresión sensible—cuestiones esbozadas por Gödel. Zubiri, como Gödel, considera que la impresión de lo matemático no es sensación, pero tampoco impresión *abstracta*, como la denomina él, sino impresión *inespecífica* o *transcendental*. Para ambos, "Este momento nos está dado allí donde lo real mismo nos está dado: en la impresión de realidad".[51] Lo que le ha faltado a Gödel es distinguir, desde inteligencia sentiente, *contenido* y *realidad.* En efecto, la impresión sensible tiene dos momentos: impresión del *contenido* cualitativo e impresión de su *realidad*. Este momento es, como también dice Gödel, "algo más" que la sensación, porque, según Zubiri, "transciende" el contenido concreto y abre desde sí mismo un ámbito de realidad, es el momento campal de lo real sentido. Éste puede autonomizarse dejando a la inteligencia en la impresión transcendental de realidad, que le posibilita la libre construcción del contenido matemático. Esta unidad entre el momento de realidad y el de creación en Gödel no aparecía claro. Esta concepción zubiriana podría decirse que es "alguna forma de platonismo" en el sentido que apuntaba Gödel. En efecto, para Zubiri tan real es el objeto matemático como un objeto físico; incluso la realidad de ambos es la misma: la realidad del objeto matemático es ese mismo "más" de toda cosa real en y por sí misma. "Y precisamente por ser un "más" es por lo que se presta a tener un libre contenido por postulación".[52] El objeto físico es realidad *en y por sí misma* mientras que el matemático es realidad *por postulación.*

Zubiri considera que los 'contenidos'

matemáticos no son perceptibles por los sentidos, pero tampoco consisten, como dice Gödel, "en relaciones entre conceptos y otros objetos ideales".[53] Su noción de inteligencia sentiente le permite matizar que la aprehensión primordial de las cosas reales "en y por sí mismas" y las reales "en y por postulación" es idéntica en la formalidad de realidad; su diferencia está en el contenido. En las primeras dado y en las segundas postulado. Lo inteligido en el logos no es sentido al igual que lo sensible respecto del contenido de lo inteligido; esta similitud concierne al modo como este contenido queda en la aprehensión.[54] La intelección matemática es sentiente porque los objetos matemáticos se inteligen *inscritos en la* formalidad de realidad *dada en impresión;* y su construcción no es mera conceptuación sino *realización* o "libre proyección" del contenido objetivo creado "según conceptos" en el ámbito transcendental de la formalidad de realidad dada en la aprehensión primordial de realidad de cualquier 'cosa' sensible, autonomizado de su contenido concreto. Sólo una inteligencia sentiente puede no sentir el contenido matemático y realizarlo libremente de modo sentiente.[55]

3.2 Construcción matemática en Gödel y su radicalización en Zubiri

Para ninguno de nuestros autores la libertad de que goza el matemático en la creación de sus objetos es absoluta, sino que está constreñida por sus propios objetos cuyas propiedades le imponen una restricción. Y, como dice Gödel, "aquello que la restringe debe evidentemente existir con independencia de la creación".[56] Dicho de otro modo, la creación matemática no es *ex nihilo*, sino a partir de algo real que "no podemos crear o cambiar, sino sólo percibir o describir".[57] Así la Matemática no sería sólo creación ni tampoco sólo descubrimiento, sino creación en "algo real dado", esto es, *construcción.*

Gödel no desarrolla la concepción de la Matemática como "construcción", esto es, "a una" creación e imposición de realidad; pero lo sugiere al proponer que la construcción matemática pudiera ser como la de una máquina. Ésta no es "ex nihilo", sino a partir de un material dado. "Si la situación fuera similar en la matemática, entonces ese material o base de nuestras construcciones sería algo objetivo, lo que por tanto exigiría la adopción de alguna concepción realista, incluso si algunos otros ingredientes de la matemática fueran de nuestra propia creación".[58] Y a continuación explica, desde el punto de vista de las facultades cognoscitivas, cómo se puede crear la matemática de un modo objetivo o realista. Si en nuestras creaciones utilizáramos algún instrumento que radicara en nosotros distinto de nuestro yo, los hechos matemáticos expresarían (por lo menos en parte) las propiedades de ese instrumento, el cual gozaría entonces de existencia objetiva. Considera que "siempre que construimos algún concepto, lo construimos a partir de otros conceptos. De ahí que los conceptos primitivos y los hechos acerca de ellos sean objetivos, al menos en este sentido de que sólo los percibimos, pero no los fabricamos".[59] Propone la amplitud de la noción de "constructividad" para que todos los conceptos matemáticos sean constructivos.[60]

Zubiri explicita la radicalización de su noción de "construcción" respecto de la de Gödel. De ella pende que el objeto formal de la construcción sea para Gödel el *concepto objetivo* mientras que para Zubiri la *realidad "en concepto"*. Esta distinción responde al cambio de paradigma de inteligencia concipiente a sentiente. Gödel, al referirse a conjuntos *construibles*[*], entien-

[*] En 1938 Gödel construyó *modelo de "conjuntos constructibles"* para probar la consistencia de la teoría de conjuntos tanto restringida como la típica y no típica. Dentro del campo de los conjuntos constructibles, el axioma de elección y la hipótesis del continuo pueden ser demostrados. En la teoría ordinaria (no necesariamente constructible) de conjuntos no se han demostrado ninguno de los dos. Cualquiera podría ser aceptado sin generar contradicción a menos que los

de por *construir* un conjunto sobre la base de los axiomas de Zermelo-Fraenkel el generarlo a través de la aplicación iterada de ciertas operaciones axiomáticamente definidas. De este modo, según observa Zubiri, construye el *concepto objetivo*. Pero "la Matemática no trata de 'conceptos objetivos' sino de 'cosas que son así'".[61] La construcción "consiste en *realizar* ante mi inteligencia un concepto ya construido objetivamente (tanto si es construible como si no lo es)".[62] Los contenidos de los conceptos matemáticos—obtenidos por construcción sensible, intuición, definición, ejecución, etc.- expresan lo que lo real "sería", es decir, se inscriben en "la" realidad en cuanto terminaría en un contenido determinado. Ahora bien, la matemática no trata de cosas que "serían" (irreales), sino de cosas que "son" (reales); no de "conceptos objetivos" sino de "cosas que son así". Lo irreal se realiza por *postulación constructiva.* De este modo, los objetos matemáticos son cosas irreales pero *realizadas constructivamente.* Con-struir es crear, proyectar libremente en "la" realidad física un contenido según conceptos.

> Sin esta construcción y postulación radical y primaria serían imposibles tanto los axiomas de Zermelo-Fraenkel y los conjuntos de Gödel y Cohen como el intuicionismo de Brouwer. La construcción matemática es siempre por tanto un acto de inteligencia sentiente".[63]

La postulación es *construcción* que dota a la realidad profunda de contenido creado (notas y estructura). Es el acto de *máxima libertad*, no de la formalidad de realidad o del "de suyo" sino de lo que es "suyo".[64] Por ella, lo irreal, sin dejar de serlo, cobra realidad postulada. Las afirmaciones de la matemática recaen sobre *un irreal realizado por postulación constructiva.*[65] La realización es *modo de actualidad,* no de producción de realidad. No "produce" nuevas realidades, sino nueva actualidad en inteligencia sentiente de "la" realidad sentida. Lo racional de la creación de los conceptos consiste en la *unidad propia de lo conceptual:* la *estructuralidad* o *unidad fundamental.* Al *realizar*[66] la unidad coherencial intelectiva, ésta cobra el carácter de unidad coherencial primaria de lo real*.

Desde la inteligencia sentiente, o desde la distinción entre contenido y realidad, ya podemos clarificar el estatuto ontológico del objeto matemático: es, según Zubiri, "a una" realidad y construcción y "a una" realidad y libertad. De ahí que se refiera al objeto matemático como *realidad postulada, realidad en construcción, realidad en concepto* y *realidad en libertad.* Sólo si se parte de la identidad entre contenido "dado" y realidad, es posible negar el carácter de realidad a lo postulado. Por ello, Zubiri distingue entre realidades "en y por sí mismas" (ej. este rayo de luz) y realidades "en y por postulación" (ej. un número complejo). El objeto matemático es real *por postulación constructiva en "la" realidad.* Al igual que Gödel, considera que los objetos matemáticos no son cosas físicas (fisicalismo) ni cosas mentales (mentalismo), sino cosas libres† o *irreal realizado.* A su modo tienen realidad física, son "de suyo" libremente esto o lo otro. "La construcción, pues, no es libertad de realidad, sino realidad en libertad".[67] "Cosa libre, consiste en que la realidad, al ser "de suyo", sea libremente esto o lo otro. La construcción, pues, no es libertad de realidad, sino rea-

axiomas "seguros" de la teoría de conjuntos restringida fuesen ya contradictorios.

* La máxima unidad la constituye el sistema constructo, en que cada nota sólo tiene realidad como nota-*de* las demás.

† Zubiri habla de *cosas mentales*, mas en su concepción, en sentido propio, no hay nada mental puesto que las simples aprehensiones (perceptos, fictos y conceptos) de lo que la realidad *"sería"* no son simples ideas sino que son el contenido de "la" realidad, por consiguiente hay que hablar de realidad *en percepto,* de realidad *en ficto* y de realidad *en concepto.*

lidad en libertad".[68]

La fecundidad de la construcción matemática en su aplicación a la realidad física se explica bien porque el matemático construye en "la" realidad física, la misma que sirve de referencia al físico, al químico, al novelista, al metafísico, al teólogo, etc. Se construyen los contenidos talitativos matemáticos, pero no "la" realidad; ésta es dada sentientemente en la aprehensión primordial de realidad.

Ni el descubrimiento ni la creación son términos adecuados para expresar el acceso a las realidades postuladas matemáticas. Su verificación es encuentro y cumplimiento. "Pero no según una "y" copulativa, sino de un modo radical en cada uno de esos dos momentos".[69] La verdad matemática es término de la intelección *en búsqueda*, está *lograda en lo dado.* Lo real postulado, en tanto que es 'más' que lo postulado, *da* que pensar (*búsqueda*) y *da* razón de sí (*encuentro*).[70] La verdad matemática es lógica históricamente (cumpliendo), y es histórica lógicamente (encontrando). "Logicidad e historicidad son los dos aspectos no solamente indivisibles, sino mutuamente codeterminantes de la unidad de la verdad racional".[71]

Desde el realismo constructivo, tan erróneo es situar los objetos matemáticos (y cualquier cosa libremente construida) *"en un mundo platónico independiente de la mente humana"* (en tanto que construcción), como *"en el pensamiento del matemático"* (en tanto que realidad). El objeto matemático es, por tanto, independiente no *de* la mente humana, sino *en* la mente humana. Zubiri acota un "reino" peculiar para las cosas libres, *un mundo transcendental,* no transcendente (no es nada separado de lo real concreto). El realismo de la matemática en tanto que constructivo se aparta del postulado matematicista de Galileo en la física moderna y el espejismo originado por fecundidad del *matematicismo*, a saber, que la estructura matemática construida sea reflejo del cosmos. Por el contrario, la idea del *universo matemático* es libre postulación, "la cual precisamente por ser libre deja seguramente en la oscuridad aspectos insospechados de la naturaleza".[72] La apropiación de la matemática como posibilidad de entender la naturaleza ha sido fecunda, pero pudiera haber obturado la apropiación de otras posibilidades que nos abrieran otros aspectos de la naturaleza quizás muy esenciales.

Bibliografia

CASTRO DE ZUBIRI, C. (1986), *X. Zubiri: Breve recorrido de una vida*, Amigos de la Cultura científica, Ensayos, 3.

DAWSON, J. W. (1984) "Cataloging the Gödel "Nachlass". *Philosophia Naturalis* 21, pp.538-545.

DAWSON, J. W. (1984) "The reception of Gödel's incompleteness theorems", PSA 1984, vol. 2. También en Shanker (1988).

DE LORENZO, J. (1979) "Lógica y matemática en K. Gödel". Estudios Filosóficos, vol. 28, núm. 79, pp. 391-453.

DIAZ MUÑOZ, G. (1995) *Zubiri y la matemática: un nuevo constructivismo*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid; y *The Xavier Zubiri Foundation of North America,* Washington, Dc.

DIAZ MUÑOZ, G. (1996) "Esbozo de la Filosofía zubiriana de la Matemática" en Actas del VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia y en *The Xavier Zubiri Foundation of North America,* Washington, DC.

DIAZ MUÑOZ, G. (1999) "Zubiri, Lakatos y la crisis gödeliana del fundamento matemático" *The Xavier Zubiri Review,* vol. 3, Washington, DC.

DUMMETT, M. (1963), "The philosophical significance of Gödel's theorem". *Ratio* 5, pp.140-155

FEFERMAN, S. (1984), "Kurt Gödel: conviction and caution" *Philosophia Naturalis* 21, pp. 546-562. (También en Shanker 1988).

FERRAZ FAYOS, Antonio, (1992) "El espacio en la metafísica de Zubiri", en *Cosmología: Física, Filosofía, Religión.* Patronato Nacional de Cultura /Amigos de la Cultura Científica, Pozuelo de Alarcón, pp. 77-90.

GÖDEL, K. (1947) "What is Cantor's continuum problem?". *Amer. Math. Monthly* 54, pp. 515-525. Reimp. en CWII, junto a la edición ampliada de 1964, (trad. cast. 1981).

GÖDEL, K. (1951) "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications" (la "conferencia Gibbs", C.G., en la Brown University Providence, Rhode Island, invitado por la American Mathematical Society, el 26 de diciembre). Reconstrucción y trad. por F. Rodríguez Consuegra. ed. Mondadori, Barcelona, 1994.

GÖDEL, K. (1953-8) "Is mathematics syntax of language?", S.L., versión II (1953-4) y versión VI (1955-1956). Reconstrucción y trad. del inédito por F. Rodríguez Consuegra, en *Kurt Gödel. Ensayos inéditos.* ed. Mondadori, Barcelona, 1994.

GÖDEL, K. (1980) "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines, I", *Cuadernos Teorema*.

GÖDEL, K(1981) *Obras completas*, O.C., J. Mosterín (ed.). Madrid, Alianza. Citado por la segunda edición ampliada de 1989.

GÖDEL, K. (1986), *Collected Works, vol I, Publications 1929-1936* (CWI), S. Feferman et al. (eds.), Nueva York, Oxford University Press.

GÖDEL, K. (1944), "Russell´s mathematical logic". En Schilpp 1944, pp. 123-154 y en CWII

GONSETH, F. (1936), *Les Mathématiques et la réalité.* Essai sur la méthode axiomatique. Libraire Félix Alcan.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1979) "In memoriam Kurt Gödel: his 1931 correspondence whit Zermelo on his incompletability theorem". *His. Math.*, 6, pp. 294-304.

HEIJENOORT, J, van (1967), *From Frege to Gödel.* Cambrige: Harvard Univ. Press.

HOFSTADTER, D. R. (1979), *Gödel, Escher, and Bach: an eternal golden braid.* Nueva York, Basic Books. (Hay trad. cast. Tusquets, Barcelona).

KNEALE, WILLIAM Y MARTHA (1962), *The Development of Logic*. Oxford: Oxford Univ. Press. Trad. cast. Madrid, Tecnos, 1972

KÖHLER, E. (1991) "Gödel und der Weiner Kreis". En *Kruntorad* 1991.

KÖHLER, E. (1993), "Gödels platonismus". En *Schimanovich et al.* 1993

KÖRNER, Stephan, (1960) *Introducción a la filosofía matemática.* Trad. de Carlos Gerhard, México, S. XXI, 1967.

KÖRNER, Stephan, (1965) "On the relevance of post-Gödelian mathematics to philosophy". *Proc. of the Intern. oll. in the Phil. of Sci.* (Londres). Amsterdam: North-Holland.

KÖRNER, Stephan,(1985) "La matemática gödeliana y sus implicaciones filosóficas" en *Mathesis,* Vol. I, nº 2, pp. 11-36.

LAZCANO, R., (1993), *Panorama bibliográfico de Xavier Zubiri*. Prólogo de C. Castro de Zubiri. Ed. Revista Agustiniana, Madrid.

MADDY, Penelope (1992^2), *Realism in Mathematics,* Oxford Univ. Press, New York.

NAGEL, E. Y NEWMAN, J. R (1958) *Gödel's Proof,* Nueva York: New York University Press. Trad. cast. en Tecnos, Madrid, 1979.

RODRIGUEZ CONSUEGRA, F., (1992) "Gödel's first works, 1929-1936: mathematics without philosophy?". *Modern Logic*, 3.

SHANKER, S. G., ed. (1988), *Gödel's theorem in focus*, Londres, Croom Helm.

WANG, Hao (1987), *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass. The MIT Press. trad. cast. *Reflexiones sobre*

Kurt Gödel. Versión esp. de Pilar Castillo. Alianza U., Madrid, 1991.

WANG, Hao (1991), "To and from philosophy-Discussions with Gödel and Wittgenstein" *Synthese* 88, pp. 229-277.

ZUBIRI, X. (1923), *Tesis Fenomenológica del Juicio*, TFJ, Madrid.

ZUBIRI, X. (1980), *Inteligencia Sentiente* , IS, Alianza Editorial, Madrid.

ZUBIRI, X. (1982), *Inteligencia y Logos*, IL, Alianza Editorial, Madrid.

ZUBIRI, X. (1983), *Inteligencia y razón*, IR, Alianza Editorial, Madrid.

ZUBIRI, X. (1985), *Sobre la Esencia,* SE, Alianza Editorial, Madrid.

ZUBIRI, X. (1986),*Sobre el hombre,* SH, Alianza Editorial, Madrid.

Notas

1 "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas conexos", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, (1931), 38, pp. 173-198.

2 Gödel C.G, p. 156. Las siglas y la referencia completa de las obras aparecen en la bibliografía final.

3 Carta que Gödel dirige a Mr. Grandjean en 1975, pero que no envió. Cf. H. Wang (1987), p. 57.

4 Gödel, S.L, II, p. 211.

5 Gödel, S.L, VI, p. 232.

6 Cf. Gödel, S.L, II, p. 200.

7 Gödel, S. L, V, p. 238.

8 Carta de Gödel a Schilpp de 1959, donde explica las razones que le llevan a no cumplir su propósito de publicar el artículo sobre Carnap. Citado por F. Rodríquez Consuegra (1994), p. 138.

9 Gödel, S.L, II, nota 49, p. 207.

10 IL, p. 101.

11 IL, p. 104.

12 Gödel, C.G, p. 166.

13 Cf. IL, p. 149.

14 IL, p. 251.

15 Cf. IL, p. 247.

16 IL, p. 251.

17 IL, p. 245.

18 Cf. IL, p. 164-5.

19 IL, p. 218.

20 Gödel, S.L, II, pp. 205-6.

21 Cf. Gödel, S.L, VI, p. 231.

22 Gödel, S.L, V, p. 239.

23 Cf. Ibid. pp. 239-40.

24 Gödel, S.L, II, p. 206.

25 Cf. Gödel, S.L, II, p. 207.

26 IR, p. 254.

27 Cf. IR, p. 279.

28 IR, p. 283.

29 IR, p. 281.

30 Véase Penelope Maddy, (1992), cap. " Gödelian Platonism", pp. 75-80.

31 Gödel, C.G, p. 169.

32 Gödel, C.G, p. 173.

33 Gödel, C.G, p. 156.

34 Ver la afirmación del teorema de Gödel en SE 355-6, SH 649, ETM 63, PFM 160, IL 327, IR 253. La interpretación zubiriana se origina no en la línea de la afirmación, sino en la de *lo afirmado,* no en la línea del contenido sino en la *formalidad*, en definitiva, no en la línea de inteligencia concipiente sino en la de *inteligencia sentiente*.

35 IL, p. 146.

36 Cf. IL, p. 129.

37 IL, p. 138.

38 Gödel, *Supplement to the Second Edition [de "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?"])* (1963), O.C, p. 427 (subrayado nuestro).

39 Gödel, O.C, p. 427.

40 Gödel, O.C, p. 427, cfr. p. 428.

41 Cf. H. Wang, o.c, p. 261.

42 Cf. Gödel, S.L, II, p. 204.

43 Cf. Gödel, C.G, p. 166.

44 Gödel, S.L, II, p. 225.

45 Gödel, O.C, p. 316.

[46] H. Wang, o.c, p. 261.
[47] IL, p. 145.
[48] Cf. IL, p. 142.
[49] Cf. IL, p. 242.
[50] Cf. IS, p. 60-61.
[51] IL, p. 265.
[52] IL, p. 134.
[53] Gödel SL, I. p. 202-3.
[54] IL, p. 51.
[55] Cfr. IL, p. 145.
[56] Gödel, C.G, p. 159.
[57] Cf. Gödel, C.G, p. 165.
[58] Gödel, C.G, p. 157.
[59] Cf. Gödel, S.L, II, p. 225.
[60] Gödel, S.L, II, p. 216.
[61] IL, pp. 141-2.
[62] IL, p. 137.
[63] IL, p. 143.
[64] Cf. IR, p. 130.
[65] Cf. IL, p. 131.
[66] Cf. IR, p. 114.
[67] IL, p. 128.
[68] IL, p. 128.
[69] IR, p. 305.
[70] Cf. IR, p. 74-5.
[71] IR, p. 305.
[72] IR, p. 132.